

La ricerca in Didattica della Matematica come Epistemologia dell'apprendimento della Matematica

Questo testo è stato oggetto di pubblicazione in due occasioni:

D'Amore B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città*, 4, 56-82.

D'Amore B. (2004). Die Mathematikdidaktische forschung als Epistemologie des Mathematiklernens. In: AA. VV. (2004). *Didaktik der Mathematik in der Primärschule*. Lussemburgo: Ministère de l'Éducation nationale de la Formation professionnelle et des Sports. ISBN 2 – 87995 – 108 –9. 65-98.

Bruno D'Amore

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia

0. Premessa

L'attuale ricerca in didattica disciplinare sembra tutta tesa ad accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento, ma da un punto di vista fondazionale e comunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento (anche se la psicologia cognitiva in questo momento sembra la più autorevole candidata al ruolo di organizzatrice fondazionale per molte esperienze di ricerca).

Affrontando la didattica disciplinare come epistemologia dell'apprendimento, farò esempi nel campo che mi compete, cioè in quello della matematica. Discussioni con colleghi, didatti di altre discipline e letture occasionali, però, mi danno conferma del fatto che le problematiche generali sembrano essere le stesse, anche nelle diverse specificità. Per cui, pur non volendo (potendo) uscire dallo stretto ambito detto, sono convinto che non troppo diversi sarebbero i possibili analoghi resoconti critici di appartenenti ad altri settori di ricerca.

Quel che farò qui è presto dichiarato. Analizzerò alcune tra le problematiche che sembrano emergere con più forza negli ultimi anni, che si sono consolidate come elementi di ricerca **in didattica della matematica**, e che mi sembrano fornire appigli solidi e significativi per una possibile generalizzazione. Mi asterrò da presentazioni troppo tecniche e mi limiterò dunque solo alla posizione di ogni singolo problema proposto, passando in rassegna, nei prossimi paragrafi, alcune tematiche molto diffuse nell'ambiente di ricerca e che sembrano essere di particolare interesse per gli insegnanti.

1. Il contratto didattico

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica l'idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau (1986), che si rilevò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita dalle sue ricerche dei primi anni '80. Furono poi gli studi della seconda metà degli anni '80 a decretarne il trionfo e la teorizzazione piena; ad essi parteciparono vari studiosi di tutto il mondo: l'idea veniva riconosciuta ed entrava a far parte del linguaggio condiviso dall'intera comunità internazionale.

Questa idea, di spirito tutto francese,¹ non era del tutto nuova. Nel 1973, Jeanine Filloux introdusse il termine di *contratto pedagogico* per definire alcuni tipi di rapporto tra docente ed allievo. Quello della Filloux era un contratto generale, più sociale che cognitivo, mentre il contratto didattico di Brousseau tiene conto anche delle conoscenze in gioco. Il primo tentativo di “definizione” del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico». (Brousseau, 1986)

Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.

Qualche esempio.

Es. 1 (concezione della scuola): L'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa; quindi anche se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere *liberamente* quel che pensa (per esempio sulle altezze di un triangolo), l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile rigoroso perché suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo; non scriverà affatto "liberamente" ma cercherà invece di dare la definizione che ritiene essere quella 'corretta', cioè quella che ritiene essere attesa dall'insegnante.

Es. 2 (concezione della matematica): Lo studente ritiene che in matematica si *devono* fare dei calcoli; per cui, anche se la risposta alla domanda posta in un problema può essere data solo rispondendo a parole, lo studente è a disagio e tende a far uso dei dati numerici per dare comunque una risposta formale.

Es. 3 (ripetizione delle modalità): Per tre lunedì consecutivi l'insegnante di matematica fa svolgere esercizi alla lavagna; da quel punto in poi l'allievo sa che ogni lunedì sarà così; una modifica al programma atteso genera sorpresa. Lo stesso vale, per esempio, quanto all'attesa del programma possibile nel corso di un'interrogazione: se l'insegnante ha sempre e solo fatto domande sul programma svolto nelle ultime lezioni, non può, a detta dello studente, fare domande su argomenti oggetto di lezione in un passato più remoto...

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *L'età del capitano* e messo in luce, tramite un libro avente quel titolo, dalla psicologa francese Stella Baruk nel 1985. Io lo racconterò qui di seguito, così come l'ho vissuto (e fatto vivere) personalmente (D'Amore, 1993a). In una classe IV elementare (età degli allievi 9-10 anni) di un importante centro agricolo, ho proposto il celeberrimo problema (nel quale il "capitano" diventa un "pastore"): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».

In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento della maestra, ho reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità) (D'Amore, Sandri 1993), dunque i

¹ Sto pensando a Jean-Jacques Rousseau ed al suo *Contrat social* (1762).

bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un'altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti (una ed una sola volta), e possibilmente nell'ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun'altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L'unico imbarazzo stava semmai nella scelta della operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell'addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...

[Si potrebbe qui fare una nota didattico-curricolare: nei programmi ministeriali per la scuola elementare italiana si legge un esplicito invito agli insegnanti a proporre agli allievi problemi con dati mancanti, con dati in eccesso, con dati contraddittori. Non si tratta di una cattiveria architettata da un burocrate ottuso ed insensibile, ma di una sollecitazione a tentare di eliminare appunto queste clausole nocive dal contratto didattico: come si sa, i bambini di solito neppure leggono il testo di un problema, ma si limitano a scorgerlo rapidamente, concentrandosi sui dati numerici e cercando d'intuire il tipo di operazione necessaria. Ma se gli allievi si comportano così, qualcosa o qualcuno deve averli indotti a questo comportamento; inutile cercare giustificazioni legate all'eccessivo tempo passato davanti alla TV, alla disgregazione delle famiglie, alla mancanza di letture, alla perdita di interesse,... Ci sono clausole del contratto didattico che sono sfuggite al controllo critico adulto e che, anzi, sembrano talvolta esplicitate.

Ci sono due dimostrazioni del fatto che non si tratta di semplicistica "colpa dei tempi".

Prima. Gli *stessi* bambini, in un contesto diverso da quello classe, alla stessa proposta di problema, non danno più la risposta detta, ma mettono in evidenza la incongruità fra i dati e la richiesta.

Seconda. Gli allievi di una classe *diversa*, nella quale l'insegnante ha più volte proposto agli allievi problemi di questi tipi, sono abituati a stare vigili: quando l'insegnante dà il testo di un problema, occorre analizzarne bene il testo; nel caso del "problema del pastore", i bambini hanno, dopo varie risatine e scambi di occhiate furtive tra loro, risposto con frasi ironiche mettendo in evidenza che il problema, così com'è formulato, non si può risolvere].

Con l'espressione *effetto «età del capitano»* si designa oggi la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica.

Naturalmente, il "caso" non è esclusivo della scuola elementare ma, mutando quel che c'è da mutare, interessa ogni ordine di scuola.

Tale effetto rientra tra quelli cosiddetti di *rottura* del contratto didattico: se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche. Ma lo studente non ha la forza, non essendo mai stato abituato, a rompere il contratto e preferisce rispettarne le supposte clausole pur di non rischiare, pur di non osare in prima persona.

Studi approfonditi sul contratto didattico hanno permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare *stricto sensu* con la matematica, ma che dipendono dal contratto didattico instaurato in classe.

Per esempio, in una ricerca sui problemi con dati mancanti e sugli atteggiamenti degli allievi di fronte a problemi di questo tipo (D'Amore, Sandri, 1998) ecco un testo proposto in III elementare (allievi di 8-9 anni) ed in II media (allievi di 12-13 anni):

«Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?».

Ed ecco un prototipo del genere di risposte più diffuse in III; scelgo il protocollo di risposta di Stefania, che riporto esattamente come lo ha redatto l'allieva:

Stefania:

Nel borsellino rimane più soldi giovanna
 $30-10=20$
 $10 \times 10=100$

La risposta "Giovanna" (58,4% di tali risposte in III elementare, età degli allievi 8-9 anni) è giustificata dal fatto che (clausola delle attese e della costanza) lo studente ritiene che, se l'insegnante affida un problema, questo *debba poter essere risolto*; dunque, anche se si accorge che manca il dato della somma iniziale, se lo inventa implicitamente più o meno come segue: «Questo problema *deve* essere risolto; dunque, forse Giovanna e Paola partivano dalla stessa somma». A quel punto, *la risposta è corretta*: Giovanna spende meno e quindi le resta più danaro. E ciò giustifica la parte scritta della risposta di Stefania. Dopo di che scatta un altro meccanismo legato ad un'altra clausola (del tipo: immagine della matematica, attese presupposte da parte dell'insegnante): «Non può bastare così, in matematica si devono fare dei calcoli, la maestra se li aspetta di certo». A quel punto, il controllo critico crolla e... qualsiasi calcolo va bene...

Nel lavoro D'Amore, Sandri (1998), abbiamo chiamato questa clausola del contratto didattico: "esigenza della giustificazione formale" (egf), studiandola in ogni dettaglio. Tale clausola egf è molto presente anche nella scuola media (età degli allievi: 11-14 anni). [La percentuale di risposte "Giovanna" scende dal 58,4% della III elementare (8-9 anni) al 24,4% della II media (12-13 anni); ma solo il 63,5% degli allievi di II media denuncia in qualche modo l'impossibilità di dare una risposta; dunque il 36,5% dà una risposta: oltre 1/3 di ciascuna classe].

Ecco un prototipo di risposta avuta allo stesso problema in II media; ho scelto il protocollo di risposta di un'allieva, riportandolo esattamente come da lei prodotto:

Silvia:

Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna [poi corretto in Paola] perché:

Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000.,

10.000 20.00

Giovanna Paola

$20.000-10.000=10.000$ (soldi di Giovanna)

$10.000+10.000=20.000$ (soldi di Paola)

Nel protocollo di Silvia si riconoscono in azione le stesse clausole del contratto didattico messe in opera nel protocollo di Stefania, ma la sua analisi è più complessa. Per prima cosa, si nota un tentativo di organizzazione logica e formale più impegnativo. Silvia, poi, dapprima scrive "Giovanna" perché ha ragionato come Stefania; poi, però, a causa della clausola egf, ritiene di *dover* produrre calcoli. È probabile che si renda conto, anche se in modo confuso, che le operazioni che sta facendo sono slegate dal problema, le fa solo perché ritiene di *dover fare* qualche calcolo. Ma, per quanto assurde, finisce con assumerle come fossero plausibili: tanto è vero che, dato che da questi calcoli insensati ottiene un risultato che contrasta con quello dato in via intuitiva, preferisce violentare la propria intuizione ed accetta piuttosto quanto ottenuto per via formale: i calcoli le danno "Paola" come risposta e non "Giovanna", come invece aveva supposto; e dunque barra "Giovanna" ed al suo posto scrive "Paola". Il contratto didattico, che questa volta è dettato da una immagine formale (a vuoto, deleteria) della matematica, ha vinto, sconfiggendo la ragione...

In D'Amore (1993b), racconto una curiosa esperienza basata sul testo seguente, dato in una scuola elementare a diverse classi:

«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:

- due di essi non possono pagare;
- da Bologna a Verona ci sono 120 km;
- un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto verrà a spendere ciascuno?».

Inutile dire che si tratta di un problema complesso, che si voleva realmente effettuare la programmazione di una gita, che gli studenti avrebbero dovuto discutere del problema e cercare la risoluzione in gruppo eccetera.

Di fatto, la stragrande maggioranza degli studenti, di fronte alla risoluzione di questo problema, commette un errore ricorrente: non tiene conto del viaggio di ritorno e calcola dunque la spesa totale con l'espressione errata: $500 \times 120 + 20000$.

Su questo punto c'è una vasta bibliografia che tende a giustificare questo fatto. Una delle giustificazioni più ricorrenti è una sorta di... dimenticanza strategica o affettiva: l'andata di una gita è emotivamente un momento forte, il ritorno no.

Per cercare di capire meglio la questione, spezzai il problema in varie componenti o fasi, con tante "domandine" parziali specifiche; ma l'errore si ripeteva. Suggerii allora ad alcuni insegnanti di far mimare le scene dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Il caso incredibile che trovai e che descrissi in D'Amore (1993b) è quello di un bambino che ha disegnato il pullman sotto una doppia freccia:

in una c'è scritto «Bologna \longrightarrow Verona 120 km», nell'altra «Verona \longrightarrow Bologna 120 km», dunque c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata.

Una delle giustificazioni più presenti date dai bambini nelle interviste è che essi non si sentono autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Conta poco il senso della richiesta contenuta nei problemi di Matematica, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali. Uno dei bambini, intervistato, dichiara: «Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo»; è evidente la lacuna che il bambino avverte: in nessuno dei dati appare lecito raddoppiare la spesa per il percorso chilometrico.

Sempre legato al contratto didattico, risulta molto interessante leggere l'atteggiamento degli studenti di fronte al seguente celebre problema di Alan Schoenfeld (1987a):

«Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?».

Dei 45000 allievi quindicenni studiati negli USA da Schoenfeld, solo meno di un quarto (il 23%) è riuscito a dare la risposta attesa: 32. Il ricercatore statunitense afferma quindi che pochissimi studenti sono in grado di rileggere il senso della domanda, osando di scrivere 32, di fatto non ottenuto formalmente nell'operazione, e propone come causa di questo comportamento questioni relative a fatti metacognitivi.

A distanza di parecchi anni, recentemente abbiamo voluto analizzare di nuovo la stessa situazione (D'Amore, Martini, 1997) ed abbiamo trovato alcune novità. La prova è stata fatta a vari livelli scolastici lasciando libertà agli studenti di usare o no la macchina calcolatrice. Abbiamo avuto molte risposte del tipo: $31,333333$ soprattutto da parte di chi usava la macchina calcolatrice; altre risposte: $31,\bar{3}$ e $31,3$.

Il controllo semantico, quando c'è, porta qualcuno a scrivere 31 (gli autobus «non si possono spezzare»), ma ben pochi si sentono *autorizzati* a scrivere 32. Tra chi usa la macchina calcolatrice, poi, si ha lo 0% di risposte “32”.

Lo studente non si sente autorizzato a scrivere quel che non appare: se anche fa un controllo semantico sugli autobus come oggetti non divisibili in parti, ciò non lo autorizza a scrivere 32; c'è addirittura chi non si sente autorizzato neppure a scrivere 31; non si può parlare semplicemente di “errore” da parte dello studente, a meno che non si intenda per errore l'incapacità di controllare, una volta ottenuta la risposta, se essa è semanticamente coerente con la domanda posta; ma allora scatta un altro meccanismo: lo studente non è disposto ad ammettere di aver fatto un errore e preferisce parlare di “trucco”, di “trabocchetto”; per lo studente un errore matematico o in matematica, è un errore di calcolo o assimilabile ad esso, non di tipo semantico.

Un lungo e sistematico studio su questa prova, eseguito anche attraverso numerose interviste agli studenti, rivela che “il colpevole” di questo comportamento è una clausola del contratto didattico, alla quale abbiamo dato il nome di “clausola di delega formale”. Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che... disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico.

Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissimi anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

2. Conflitti e misconcezioni

Un altro argomento di studio in didattica della matematica che sta emergendo con estrema forza e grande rilievo riguarda i *conflitti cognitivi*. Si tratta di questo: lo studente può nel tempo aver assunto un concetto ed essersene fatto un'immagine; questa immagine può essere

stata rinforzata nel tempo da prove, esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto ad un'altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall'insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente.

Si crea così *conflitto* tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva.

Legata alle idee di “immagine di un concetto” e “conflitto”, c'è un'importante questione che riguarda la *misconcezione*. Una *misconcezione* è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una *misconcezione* momentanea, ma in corso di sistemazione.

Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie *misconcezioni*, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute.

Qui si presenta la vasta ed interessante problematica del curriculum nascosto. Lo studente rivela le proprie *misconcezioni* quando applica *correttamente* regole *scorrette*. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Se l'insegnante non si rende conto di ciò, le sue sollecitazioni cadono a vuoto perché lo studente ha già incluso nel proprio curriculum quelle regole che ritiene corrette e che, in taluni casi, hanno funzionato.

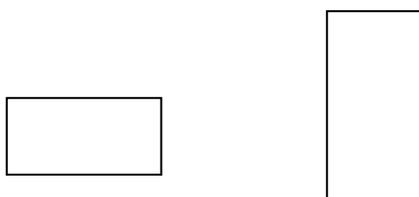
Per esempio, in una III elementare, uno studente eseguiva in colonna le seguenti sottrazioni:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
----	----	----	----
13	22	12	13

L'insegnante osservò che tre sottrazioni su quattro erano state risolte correttamente, diede dunque una valutazione positiva, ma invitò lo studente, nella terza, a “prendere in prestito una decina”. Lo studente non capiva di che decina si stava parlando perché aveva in mente un'altra regola personale: per eseguire le sottrazioni in colonna si procede da destra verso sinistra e, in ogni colonna, si sottrae dal più grande il più piccolo. Ne aveva avuto conferma in molti casi, la comunicazione che riguardava casi come la terza sottrazione non gli era giunta per chissà quale motivo, e dunque aveva assunto nel suo curriculum quella “regola”. Essa funzionava *quasi* sempre e nei casi negativi egli non capiva perché: stava usando *correttamente*, infatti, una regola che non sapeva essere invece scorretta. Una vera e propria *misconcezione*.

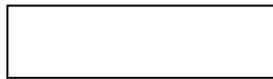
Qualche esempio.

Es. 1: Lo studente ha sempre visto immagini di rettangoli con lati (base ed altezza) di lunghezza diversa (anche se nella definizione proposta si parla solo di parallelogrammi con angoli retti). Egli ha allora assunto come immagine-prototipo del rettangolo una figura che *deve* avere base ed altezza diverse.

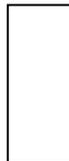


Un giorno l'insegnante analizza un po' più a fondo da un punto di vista logico la definizione di rettangolo, a partire dal parallelogramma, e mostra come la richiesta riguardi solo l'ampiezza dei quattro angoli interni (che devono essere tutti retti) e quindi non esclude il caso del quadrato, pensato come un rettangolo che però ha base ed altezza di ugual lunghezza. Nasce, o, meglio, può nascere un conflitto cognitivo, legato al prototipo di figura attesa (e confermata dall'esperienza), tra l'immagine di rettangolo (che esclude il quadrato) e la nuova immagine proposta.

Es. 2: Uno studente di I elementare aveva sempre visto disegnare un rettangolo "appoggiato" sulla base orizzontale e con l'altezza, verticale, più corta; si era dunque fatto un'immagine del concetto "rettangolo" siffatta e tale immagine era sempre stata confermata dall'esperienza:



Un bel giorno gli venne proposta un'immagine di rettangolo che ha la base sì orizzontale (e dunque l'altezza verticale), ma la base è più corta dell'altezza:



Significativa la denominazione che il bambino diede spontaneamente, per adeguare il concetto già assunto all'immagine nuova, definendo questa "nuova forma" come «rettangolo in piedi». Si riconosce in questa denominazione spontanea l'esito felice di un conflitto cognitivo tra una misconcezione (immagine che sembrava stabile di "rettangolo" e che invece era ancora in via di sistemazione) e la nuova immagine proposta sapientemente dall'insegnante.

[Una volta mi è successa una cosa simile con insegnanti delle medie (ma non in Italia); alla mia denominazione di "trapezio" di una figura siffatta:



ho avuto forti reazioni di non accettazione, al principio..., ovviamente subito rientrate. La posizione stereotipata del trapezio lì per lì ha creato (ovviamente si è trattato solo di pochi secondi) una situazione di disagio].

Gli esempi potrebbero continuare a lungo, ma ritengo che questi possano bastare.

Dunque, il conflitto cognitivo è un conflitto "interno" causato dalla non congruenza tra due concetti, o tra due immagini o tra un'immagine ed un concetto.

Ma il conflitto può anche essere sociale. Supponiamo cioè che lo studente abbia un'immagine o un concetto su un certo argomento e che ritenga si tratti di quello condiviso da tutta la classe (o, più in generale, da tutta la società); un bel giorno tale immagine o tale concetto entra in

conflitto con quello proposto dall'insegnante e/o da una nuova situazione e, in quella occasione, lo studente si accorga che quello suo non è affatto condiviso dalla classe, anzi, riguarda lui solo, è isolato; per esempio gli altri non si meravigliano affatto di una proposta che lui non riesce, invece, ad accettare.

Un esempio solo: un quadrato è sempre disegnato e proposto dai libri di testo con i lati orizzontali e verticali, il rombo spessissimo con le diagonali orizzontale e verticale. Lo studente Pierino si è fatto l'idea che i quadrati *devono* essere così ed i rombi invece così, ed è convinto che la sua concezione sia la stessa di tutti i compagni di classe; crede cioè, implicitamente, che si tratti di una idea largamente anzi totalmente condivisa. Un bel giorno l'insegnante disegna un quadrato con le diagonali orizzontale e verticale, ma non lo chiama "rombo", come Pierino si aspetta, bensì "quadrato".

Pierino sussulta: il maestro si è sbagliato? Ma si accorge invece che il resto della classe accetta questa denominazione: si tratta sì di un conflitto cognitivo, ma non solo sul piano individuale "interno", bensì pure sul piano sociale perché mette Pierino in conflitto con un concetto che riteneva condiviso.

Alla base dei conflitti ci sono quindi le *misconcezioni*, cioè concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Attenzione, però: lo studente non lo sa e dunque ritiene che le sue, quelle che per il ricercatore sono misconcezioni, siano invece concezioni vere e proprie! Dunque è l'adulto che sa essere quelle elaborate e fatte proprie dai ragazzi delle misconcezioni. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale: non si tratta di punire, di valutare negativamente; si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica. In un certo senso, dato che anche i bambini molto piccoli (3-6 anni) hanno concezioni matematiche ingenua ma profonde (Aglì, D'Amore, 1995) ottenute empiricamente o per scambio sociale, si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene la matematica, sia costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni corrette.

In un certo senso, le misconcezioni, intese come detto (concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica) non sono eliminabili, né costituiscono del tutto un danno. Sembrano un momento delicato necessario di passaggio, da una prima concezione elementare (ingenua, spontanea, primitiva, ...) ad una più elaborata e corretta.

Alla base di questo tipo di problematiche, porrei alcuni studi di Piaget-Inhelder, anche se oggi c'è stata una grande evoluzione di ricerche in questo campo. Esse invadono anche la fissità funzionale, l'effetto Einstellung, i parassiti cognitivi ecc.

Per non dilungarmi troppo, rinvio a (D'Amore, 1993b).

3. Immagini e modelli

Appena un rapido cenno su questo complesso argomento. Poiché ho fatto riferimento, sopra, a termini come "immagine" e "modello" è bene chiarire che accetto la seguente terminologia (non totalmente condivisa, però).

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria.

L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative ad un certo concetto costituisce il modello mentale (interno) del concetto stesso.

Detto in altro modo, lo studente si costruisce un'immagine I_1 di un concetto C ; egli la crede stabile, definitiva. Ma ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni su C che non sono contemplate dall'immagine I_1 che aveva. Egli deve allora (e ciò può essere dovuto ad un conflitto cognitivo, voluto dall'insegnante) adeguare la "vecchia" immagine I_1 ad una nuova, più ampia, che non solo conservi le precedenti informazioni, ma accolga anche le nuove. Di fatto si costruisce una nuova immagine I_2 di C . Tale situazione può ripetersi più volte durante la storia scolastica di un allievo.

Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nei mesi o negli anni, da un'immagine ad un'altra più... potente e si può immaginare questa successione di costruzioni concettuali, cioè di successive immagini $I_1, I_2, \dots, I_n, I_{n+1}, \dots$ come una specie di scalata, di "avvicinamento" a C .

Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti dopo vari passaggi "resiste" a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che arrivano rispetto al concetto C che rappresenta. Un'immagine di questo tipo, dunque stabile e non più mutevole, si può chiamare "modello" M del concetto C .

Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile).

Ci sono due possibilità:

- M si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello corretto, proprio quello che l'insegnante auspicava per C ; l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello M corretto (quello voluto dall'insegnante) del concetto C ;
- M si forma troppo presto, quando ancora rappresenta solo un'immagine che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata; a questo punto non è facile raggiungere C perché la stabilità di M è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

Proseguiamo nell'analisi dei modelli e del loro ruolo nell'apprendimento.

Quando un insegnante propone un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto C , l'immagine si trasforma in *modello intuitivo*.

C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello che del concetto C ci si aspetta all'interno del sapere matematico.

Dunque, tra i modelli, si riserva il nome di modello intuitivo a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte.

Si parla anche, talvolta, di *modelli parassiti*.

Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra numeri naturali ed avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, modello intuitivo rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (per *schieramento*), si forma un modello parassita che si può enunciare così: la moltiplicazione cresce sempre, *deve* crescere sempre.

Analogo è il modello parassita della divisione. Sia che venga affrontata "per contenenza" sia "per ripartizione", se non si conosce un po' di Didattica della matematica, si può correre il rischio di dare allo studente un modello intuitivo che finirà con il produrre un modello parassita: in una divisione $A:B$, il numero B *deve* essere minore del numero A .

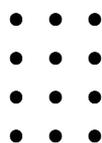
Didatticamente conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere.

Più “forte” è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per *accomodarlo* ad una nuova immagine. Insomma, la immagine-misconcezione non deve diventare modello visto che, per sua stessa natura, è in attesa di definitiva sistemazione.

Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente per non favorire l’insorgere di modelli parassiti.

Vediamo alcuni esempi in dettaglio.

Es. 1. Lo studente ha verificato per anni che l’operazione di moltiplicazione “aumenta il valore dei fattori”; detto in altre parole, il prodotto di due fattori è maggiore di entrambi (12 è ben più grande di 3 e di 4; e 60 è ben più grande di 12 e 5; ...). Anche le immagini figurali (di schemi rappresentativi ed operativi) offerte all’allievo per rendere accettabile ed intuitiva l’operazione di moltiplicazione confermano questa attesa intuitiva (per esempio, un maldestro uso del cosiddetto “schieramento” diffusissimo nella realtà didattica della scuola primaria). Infatti, fin dal primo ciclo elementare, l’immagine figurale della moltiplicazione, per esempio 3×4 , è data da 4 file di 3 oggetti:



È evidente che una figura siffatta rinforza *quell'*immagine del concetto. Ma poi fatalmente arriverà il giorno in cui si deve moltiplicare quel 3 non più per 4, ma per 0,5 ed allora il modello (ormai formatosi) non funziona più e la sua supposta regola generale dell’aumento crolla; ed abbiamo il conflitto (Fischbein, 1985, 1992).

A questo punto assimilare la nuova situazione per accomodare il modello precedente ad un nuovo non è affatto facile (in quanto caratteristica dei modelli, nei confronti delle immagini, è proprio la loro stabilità).

Si crea quindi la necessità didattica di non rendere stabile quell’immagine troppo presto, allo scopo di poterla poi ampliare successivamente, nel tentativo di costruire un modello del concetto di moltiplicazione in modo ottimale, che tenga conto dei successivi ampliamenti ai numeri non naturali.

Non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari!) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni: 18×0.25 e $18 : 0.25$ la prima è quella che dà un risultato minore. Essi conservano il modello errato creatosi nella scuola elementare in base al quale “la moltiplicazione aumenta i valori”.

Es. 2. Lo studente ha sempre diviso un numero grande per uno più piccolo; detto in altre parole, si è fatto l’immagine che il dividendo *deve* essere maggiore del divisore. Lo stesso modo in cui la divisione è proposta spinge a ciò: si tratta sempre di ripartire molti oggetti tra poche scatole o cose del genere (divisione di ripartizione); si tratta sempre di contenitori che raccolgono diversi oggetti ciascuno (divisione di contenezza). Ma ciò comporta allora che, di fronte ad un problema del tipo:

«15 amici si dividono 5 chilogrammi di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?»,² (Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983; D’Amore, 1993b),

² È uno dei problemi di una serie di 42 presentati in Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino (1983); questo articolo è a lungo discusso ed i suoi risultati sono paragonati a quelli ottenuti da me in Romagna, in D’Amore (1993b), pagg. 168-185.

lo studente, anche delle scuole superiori (età 14-19 anni), venga spontaneamente spinto ad eseguire 15:5 [calcolando non quanti biscotti spettano a ciascun amico, ma "quanti amici a ciascun chilo di biscotti", come ebbe a commentare con ironia uno studente di I Liceo Scientifico di Lugo (RA) (età 14-15 anni), in occasione dell'intervista, quando lo si mise a riflettere sul suo 15:5]. Tra l'immagine intuitiva della operazione e quella poi costruita in modo più raffinato e profondo, c'è conflitto.

In situazioni nelle quali non c'è un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, il modello intuitivo dell'operazione emerge sempre con energia. Si può ipotizzare infatti che, anche quando lo studente più evoluto si è costruito (con fatica) un modello corretto di un concetto C, modello assai vicino al sapere matematico, in condizioni di normalità il modello intuitivo fa sempre ancora capolino, dimostrando la sua persistenza.

Per comprendere meglio, rivediamo la questione dello studente di I liceo citato poco sopra. In situazione di routine, lo studente "cade" nella trappola tesagli dal suo stesso modello intuitivo; ma quando durante l'intervista lo richiamo restituendogli il suo testo, questa nuova situazione provoca un'attenzione diversa, più consapevole, ed una messa in causa di fatti cognitivi più forti: a questo punto non è più il modello intuitivo a dominare la scena, ma quello più raffinato, elaborato cognitivamente. Proprio la reazione sorpresa e divertita dello studente dimostra che lui stesso non si è reso conto del fatto di aver usato un modello intuitivo al posto di uno più elaborato.

Es. 3. Ancora sulla divisione. Nello stesso articolo di Efraim Fischbein del 1985 citato poco fa, compare un altro interessantissimo test che ho personalmente molto spesso utilizzato, soprattutto in occasione di incontri con insegnanti.

Esso si compone di fatto di due esercizi; ho conservato il primo del tutto inalterato, mentre ho invece ritoccato un po' il testo del secondo per far sì che avesse esattamente la stessa parte letteraria del primo:

P1. Una bottiglia di aranciata, che contiene 0,75 l, costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 l ?

P2. Una bottiglia di aranciata, che contiene 2 l, costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 l ?

Se si dà da risolvere solo P1, celando alla vista P2, si noterà sempre tra i presenti un tempo di imbarazzo più o meno lungo. Dato poco dopo anche P2 ed evidenziato il fatto che si tratta dello stesso problema, molti saranno disposti ad ammettere con sincerità che, mentre il secondo problema si risolve immediatamente con la divisione 6:2, risolvere il primo con l'analogia divisione 2:0,75 crea forti imbarazzi.

Vediamo il commento nell'ambito del quale mi servirò di un brano che cita lo stesso Fischbein:

«Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no».

Ho spesso provato a chiedere agli insegnanti ed agli studenti più maturi come avessero fatto a risolvere P1. Alcuni hanno confessato di aver considerato 0,75 come $\frac{3}{4}$ e di aver dunque proceduto nel campo delle frazioni (non operando sempre in modo ineccepibile). Altri hanno

invece ammesso di aver risolto P1 con la proporzione $0,75 : 2 = 1 : x$ e di aver poi applicato le note proprietà per risolvere (con successo). Ora, si badi bene, nel corso della risoluzione di questa equazione lineare nell'incognita x , c'è un momento in cui si *deve* fare $2:0,75$, cioè apparentemente la stessa operazione che, se eseguita direttamente sui dati del problema, avrebbe risolto P1 in un battibaleno. Ma non è la stessa cosa! Se è vero, com'è indiscutibilmente vero, che c'è una forte resistenza in moltissimi di noi ad eseguire direttamente $2:0,75$ (a causa del contrasto tra significato formale e significato intuitivo della divisione), non c'è più alcun imbarazzo ad applicare le regole delle proporzioni ed a eseguire i *passaggi di un algoritmo*, quando questo arriva al momento finale di chiederci di eseguire *l'apparentemente stessa* operazione. Qui, come ormai sappiamo, scatta una clausola del contratto didattico, quella di *delega formale*: in un certo senso, non ci impegniamo più direttamente nel fare quel passaggio, non è più una questione di scelta, di decisione personale. A quel punto stiamo solo seguendo una procedura che consiste in una serie di passaggi automatici, per i quali abbiamo avuto consenso e delega, e per i quali non dobbiamo più darci, dentro di noi, una giustificazione passo-passo. La cosa, bisogna ammetterlo, è di straordinario interesse.

Es. 4. L'addizione. Raccogliendo un'idea di Gérard Vergnaud (1982),³ Fischbein la considera un ulteriore esempio di non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo. Si tratta di 3 problemi additivi, a una tappa, cioè che si risolvono con una sola operazione. Li riporto per intero, per comodità del lettore:

- P.A *Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?*
- P.B *Giovanni ha speso 4 franchi. Egli ha ora in tasca 7 franchi. Quanti franchi aveva prima?*
- P.C *Roberto ha giocato due partite. Nella prima ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda partita si è trovato in vantaggio di 7 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?*

Tutti e tre i problemi, è ovvio, si risolvono con la stessa operazione $4+7$; ma essi hanno percentuali di successo incredibilmente diverse.

■ P.A è ben risolto già in seconda elementare (all'età di 7 anni): i risolutori arrivano a sfiorare il 100%. Qui, d'altra parte, c'è perfetta coincidenza fra *significato formale* e *significato intuitivo*: l'addizione è l'operazione che risolve problemi di unione tra raccolte (prive di elementi comuni). Ma quasi nessuno degli stessi ragazzi risolve P.B e quei pochi che lo risolvono più o meno tirano a indovinare: dopo tutto ci sono solo due dati numerici a disposizione, 4 e 7 ...;

■ P.B è risolto, anche se con difficoltà, in quarta o quinta elementare (all'età di 9 o 10 anni); diciamo che, comunque, le soluzioni corrette ottenute con consapevolezza raggiungono una discreta percentuale;

■ P.C è causa di un insuccesso pressoché totale. Ancora in prima e seconda media (all'età di 11 o 12 anni), P.C ha percentuali di risoluzione solo di circa il 25%, o anche meno, in accordo con le prove fatte da Vergnaud e da Fischbein.

³ Si tratta dello studio di una terna di problemi, famosissima, che appare citata in moltissimi testi; è presente e discussa anche in D'Amore (1993b).

Tuttavia è ovvio che qui non si tratta solo di significati formali ed intuitivi dell'addizione. Qui si tratta anche e forse soprattutto di difficoltà di gestione "narrativa" del testo. [E questo aprirebbe l'importante questione della stesura del testo dei problemi, per la quale rinvio a D'Amore (1993b); D'Amore, Franchini et al. (1995)].

Questo tipo di prove, da un punto di vista didattico applicativo, evidenziano per lo meno che è falso quel supposto criterio di difficoltà della risoluzione dei problemi in base al quale l'aumentare del numero di operazioni da eseguire nella risoluzione è sinonimo di aumento della difficoltà. È facilmente provabile che vi sono molti problemi che richiedono due operazioni assai più facili da risolvere che non P.B; P.C, poi, con la sua pur unica operazione, resta fuori della portata dell'intera scuola elementare...

La resistenza all'uso dell'addizione in situazioni considerate di non congruenza tra significato formale e significato intuitivo, sono testimoniate non solo nella scuola elementare, ma anche in tutta la scuola media. Si veda, per esempio Billio et al. (1993); ivi si analizzano anche situazioni esplicitamente denunciate da allievi in opportune interviste.

Es. 5: La sottrazione. La sottrazione, poi, *per sua stessa natura*, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a dispetto di un unico significato formale, che si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti ancora da Fischbein:

1. *Se togliamo 3 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?*
2. *Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?*

È ovvio che entrambi i problemi si risolvono con una sottrazione; ma nel primo caso, quello del *togliere via* (come lo chiama Fischbein), la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nel secondo caso sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo : $7 + \dots = 10$, intendo in qualche modo che quei puntini ... devono valere 3. D'altra parte è addittiva ogni strategia di "complemento a", come, per esempio, l'operazione di dare il resto in un negozio: il negoziante di solito non fa la differenza, ma fa, passo a passo, il complementare a partire dalla spesa fino ad arrivare alla somma versata. Abbiamo dunque tra gli allievi una certa percentuale di risposte scorrette; al posto della sottrazione, c'è chi fa l'addizione $7+10$ o $10+7$ legata al fatto che c'è la parola *aggiungere* che suggerisce l'uso dell'addizione.

C'è un forte contrasto tra l'operazione ingenua e spontanea di conteggio che verrebbe di fatto ad essere usata in una situazione concreta (cioè il conteggio: $7+1+1+1$, con la risposta 3 legata al numero dei +1 necessari per giungere a 10) ed il significato formale della sottrazione. Se esistesse un'operazione specifica che esprime il numero di quei +1 che permettono di passare da 7 a 10, probabilmente la percentuale di successo salirebbe nettamente; qualcuno potrebbe dire che quell'operazione esiste ed è proprio la sottrazione espressa da $10-7$; ma le prove fatte e le considerazioni effettuate finora mostrano che *non* è questo il significato intuitivo con cui gli studenti costruiscono nel loro cognitivo la sottrazione.

E tanto ci sarebbe da dire circa una situazione, cui ho appena fatto cenno sopra, ancora più complicata legata ai *due significati intuitivi* della divisione, quello di ripartizione e quello di contenenza, entrambi corrispondenti ad un unico *significato formale*. Più volte ho incontrato insegnanti elementari che mi confessavano di trattarle a parte, come due operazioni diverse, per evitare imbarazzi nello studente.

4. Modelli interni ed esterni: la "traduzione"

Risalire al modello mentale che un individuo si fa di un concetto è impresa ardua se non addirittura impossibile; se l'individuo vuol commentare a sé stesso il proprio modello mentale, di solito lo fa in una lingua interna che sembra assolutamente personale e priva di regole lessicali. Ma se intende comunicare all'esterno il proprio modello, allora *deve* "tradurlo" in qualche cosa di "esterno" [quale che sia il linguaggio nel quale comunicherà il risultato: verbale (orale o scritto), non verbale (figurale, mimico, gestuale,...)].

Dunque un modello esterno di un concetto è la sua proposta consapevole in una qualche forma di linguaggio, proposta fatta per necessità o per desiderio di comunicare.

Ho usato il verbo "tradurre" perché si tratta di una vera e propria traduzione e molta ricerca attuale si occupa dei modi di tale traduzione e delle influenze che hanno fattori quali personalità, stile cognitivo, ambiente ecc., su alcune caratteristiche di essa (per esempio la lingua interna e la conoscenza tacita).

Per la didattica della matematica, questo tipo di temi ha grande interesse, dato che tutta la comunicazione matematica avviene per modelli esterni. Detto in altre parole, non sapremo mai qual è il modello mentale che Pierino si è fatto, per esempio, delle altezze di un triangolo. Se anche glielo chiedessimo, non otterremmo altro che il risultato di quella traduzione di cui dicevo sopra; dopo di che, ri-tradurre in senso inverso per risalire al modello mentale di Pierino è impossibile... Nel corso di colloqui o di interrogazioni, a causa di alcune clausole del contratto didattico, Pierino anzi cercherà di dare modelli esterni vicini a quelle che ritiene essere le attese dell'insegnante, più che al suo modello interno! Tramite tecniche di indagine piuttosto sofisticate, però, si riesce a far sì che lo studente si svincoli dal rapporto con l'insegnante-valutatore e dall'immagine della classe come luogo di ricerca del consenso. Se lo studente accetta di esprimersi in un linguaggio naturale, per esempio come se dovesse rivolgersi ad un bambino più piccolo per spiegargli che cosa sono le altezze di un triangolo, allora si hanno informazioni che, senza ingenuamente pensare siano la descrizione esatta del modello mentale (interno), sono però piuttosto personali e profonde.

A proposito dell'esempio, *non* scelto a caso, ecco come una ragazza di II media (età 12-13 anni), fingendosi adulta e mamma, spiega ad un supposto figliolo di 7 anni perché i triangoli hanno tre altezze:

Simona:

Figlio mio, la geometria tu non la conosci però voglio spiegarti che cosa vuol dire altezza. Come te, io, e papà abbiamo un'altezza, che si misura dalla testa ai piedi, anche i triangoli ne hanno una, però la loro si misura dal vertice che è un puntino fino alla base che sono come i nostri piedi. Però dato che loro hanno 3 puntini (vertici), hanno tre altezze perché hanno i nostri 3 paia di piedi. E dato che noi abbiamo una sola testa e un sol paio di piedi, abbiamo solo un'altezza.

Ora, non è affatto detto che il modello mentale di Simona sia quello da lei descritto così bene a parole, ma certo ottenere questo tipo di modello esterno in forma verbale scritta richiede attenzioni pedagogiche notevoli e ci dà molte informazioni su come Simona si è immaginata una soluzione cognitiva per accettarlo (D'Amore, Sandri, 1996).

sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola); si potrebbe pensare come «la cappa esterna che contiene tutte le persone che nella società pensano ai contenuti ed ai metodi di insegnamento» (Godino, 1993).

C'è anche un legame tra noosfera e contratto didattico, in quanto su alcune clausole del cd ha certo influenza diretta l'ambiente nel quale ci si trova ad operare.

Su questo importante argomento, mi limito qui a questo breve cenno.

6. Stile cognitivo e profili pedagogici

Nel suo celebre libro *Les profils pédagogiques*, Antoine De La Garanderie (1980) afferma esistere delle differenze di evocazione attraverso la memoria di una idea, di una immagine mentale, nelle diverse persone: alcune sono "per loro stessa natura" *visuali*, altre *uditivo*. È ciò che egli chiama *lingua pedagogica materna*: suggerisce di definire degli *abiti cognitivi*, misurare frequenze d'uso (per esempio in classe), stabilire una tipologia. Egli distingue allora quattro parametri che caratterizzano le operazioni mentali, due "semplici" [evocazione di cose, evocazione di parole] e due "complesse" [evocazione di relazioni, evocazione di anticipazioni o inventive (sia visivamente, sia uditivamente)]. Le combinazioni di questi diversi parametri ed il grado di dominanza dell'uno o dell'altro gli permettono di definire sei modelli cognitivi che chiama *profili cognitivi*.

Ciò porta all'idea di *stile cognitivo* che, a mio avviso, è però questione assai più ampia. Fermo restando che si tratta dell'insieme delle caratteristiche personali che ciascun individuo ha e mette in opera nel processo (consapevole o no) di apprendimento, queste non dipendono solo da fatti "naturali", ma pure da stati d'essere momentanei, disponibilità, interesse e motivazione ecc.

Non è casuale, a mio avviso, il fatto che tra gli esempi d'analisi preferiti da De La Garanderie, si trovi spesso la matematica. Le modalità del suo apprendimento sono certamente molto legate a fattori individuali, ma anche alla stabilità ed alla labilità del momento, dato che la nostra disciplina, forse più di altre, richiede attenzione e concentrazione.

Ma su ulteriori approfondimenti, sorvolo, perché fatalmente si entra in problematiche profonde sui modelli didattici, sulle modellizzazioni dei processi d'apprendimento e dunque sulla tipologia delle operazioni mentali (Meirieu, 1987).

7. Ostacoli

Non è facile formarsi concetti; ciò perché ogni concetto, anche semplice in apparenza, è circondato da un intorno fluttuante e complesso di rappresentazioni associate che comportano molteplici livelli di formulazione e livelli di integrazione del concetto (Giordan, De Vecchi, 1987).

Dunque il primo problema è quello di "ripulire" il concetto da questo alone che sembra nascondere il significato intimo. E poi c'è da tener presente gli *ostacoli* che si frappongono all'apprendimento, proposti una prima volta da G. Brousseau nel 1983; concetto che aveva ripreso da studi filosofici di Gaston Bachelard.

Vediamo di che si tratta: ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Egli distingue tre tipi di ostacoli:

- di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica.

Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto all'acquisizione di certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti rispetto ad un progetto didattico da parte dell'insegnante e possono costituire quindi ostacoli di *natura ontogenetica* (l'allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica).

Per esempio, si rivela fallimentare ogni tentativo di introdurre dimostrazioni in seconda o terza media (età degli allievi 12-14 anni), al momento di presentare il teorema di Pitagora; ciò costringe gli insegnanti a sostituire la "dimostrazione" con una "prova" a volte concreta. Si ritiene generalmente che questo fallimento sia legato all'età degli studenti ed alla loro immaturità critica.

Ancora per esempio, si rivela fallimentare tentare di introdurre nella scuola elementare il connettivo logico "implicazione": se A allora B, per lo stesso motivo.

Ogni docente sceglie un progetto, un curriculum, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.

Un esempio di ostacolo didattico è la presentazione che fanno taluni insegnanti della scuola elementare al momento di presentare gli oggetti infiniti: il segmento come infinità di punti, la retta come figura illimitata. Il modello più diffuso nelle scuole è quello del segmento come una collana di perline che, per la sua immediatezza, viene subito accettato dagli studenti e diventa modello intuitivo; esso costituisce un evidente ostacolo didattico al momento in cui si deve introdurre l'idea di densità, nella stessa scuola elementare ed ancora di più nella scuola media, e quando si deve introdurre l'idea di continuità nella scuola superiore. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che gli studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come collana di perle. Quanto alla retta come figura illimitata, essa ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli studenti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che pure crea gravi ostacoli didattici nei corsi successivi.

Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della Matematica, dalla sua accettazione critica nell'ambito della Matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere.

Quando nella storia della evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico ad essere appreso; ciò si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.

Ad esempio, l'infinito matematico costituisce certo un ostacolo epistemologico; basti ripercorrerne la storia all'interno della matematica per rilevare le lotte, le discussioni, le rotture che ha determinato la sua accettazione dal momento in cui Zenone di Elea (V-VI sec. a. C.) introdusse i suoi celebri paradossi, fino alla condanna di Aristotele di Stagira (III sec. a.

C.) dell'infinito attuale e su su fino alla completa accettazione, grazie all'opera di Georg Cantor (a cavallo tra i secoli XIX e XX). Dal punto di vista didattico, la cosa è stata ampiamente studiata nel contesto internazionale.

Lo zero pure costituisce ostacolo epistemologico; esso era assente presso tutte le popolazioni antiche, compresi Greci e Romani, ed apparve solo nel VI sec. d. C. in India; fu divulgato grazie alle opere del mondo arabo attorno al IX sec. d.C.; ma la sua presenza in opere europee dei secoli XIII e XIV fu molto ostacolata e causa di furibonde lotte. Una piena accettazione dello zero come vero e proprio numero è tarda e si può forse far risalire al secolo XVI. Dal punto di vista didattico, è ben noto che lo studente vede lo zero come numero "speciale" e difficilmente lo domina.

I numeri interi, quelli dotati di segno e che a scuola si usa chiamare "relativi", fanno la loro comparsa solo nel VI sec. d. C. in India ed hanno una storia analoga a quella dello zero ma ancora più osteggiata e tardiva. Inutile ricordare come, dal punto di vista didattico, vi siano molte difficoltà, da parte degli studenti, a darsi ragione del funzionamento di tali numeri. Esempio classico è la stranezza del fatto che il prodotto di due negativi è positivo.

Riassumendo, l'ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua maturità (da tanti punti di vista), quello didattico alla scelta strategica del docente, quello epistemologico alla natura stessa dell'argomento.

Quando ed in occasione di quali idee matematiche è probabile che si abbia un ostacolo epistemologico?

- Si ha quasi certamente un ostacolo epistemologico a proposito di quelle idee per le quali nell'analisi storica di essa si riconosce una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico-critica dell'idea stessa;
- si ha un ostacolo epistemologico a proposito di un'idea quando uno stesso errore si verifica come ricorrente più o meno negli stessi termini attorno a quell'idea.

La ricerca degli ostacoli va allora fatta contemporaneamente, e questo legame è interessantissimo:

- ◆ a scuola, nella pratica didattica;
- ◆ nello studio della storia della Matematica, congiungendo l'una ricerca con l'altra.

È di estremo interesse la posizione secondo la quale, come scrive Federico Enriques (1942),⁵ l'errore «non appartiene né alla facoltà logica né all'intuizione, [ma] s'introduce nel momento delicato del loro raccordo».

L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali.

Dunque non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibili, ma della evidenziazione di ostacoli nel senso sopra citato. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in Didattica della matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore ed il suo ruolo.

⁵ Per rintracciare questo articolo nella letteratura, bisogna cercare come autore Adriano Giovannini, lo pseudonimo che Enriques fu costretto ad usare sotto il regime fascista, per fuggire alle persecuzioni razziali e soprattutto per poter continuare a pubblicare, cosa che gli era allora proibita. Si ha allora la citazione (Giovannini, 1942).

Questo tipo di studi è di grande fascino ed ha già dato molti interessanti frutti; qui non posso che sorvolare.

Bibliografia

- Aglì F., D'Amore B. (1995). *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*. Milano: Juvenilia.
- Baruk S. (1985). *L'âge du capitain*. Paris: Seuil.
- Billio R., Bortot S., Caccamo I., Giampieretti M., Lorenzoni C., Rubino R., Tripodi M. (1993). Sul problema degli ostacoli intuitivi nell'uso dell'addizione. *La matematica e la sua didattica*, 4, 368-386.
- Brousseau G. (1983). Obstacles Epistémologiques en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4.2, 165-198. Ma l'ispirazione filosofica di questa idea si può certo far risalire a G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, 1938.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y., Joshua M.-A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3, 1. 159-239
- D'Amore B. (1993a). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16. Firenze: Giunti.
- D'Amore B. (1993b). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].
- D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2001). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A. 2. 131-146.
- D'Amore B., Martini B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La Matematica e la sua didattica*, 3, 348-353. Bologna: Pitagora. Ristampato in: A. Gagatsis (ed.), *Didactiché ton Mathematicon*, Erasmus ICP 93G 2011/II, Thessaloniki 1994, in greco 247-252, in francese 579-584.
- D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18. Bologna: Pitagora. Traduzione francese in: *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Belgio, XXXV, 1, 1999, 55-94.
- D'Amore B., Sandri P. (1996). Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19A. 3. 223-246.
- De La Garanderie A. (1980). *Les profils pédagogiques*. Paris: Le Centurion.
- Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6, 6, 6-27.
- Filloux J. (1973). *Positions de l'enseignant et de l'enseigné*. Paris: Dunod.

- Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 122-132.
- Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: E. Fischbein-G.Vergnaud, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, a cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 1-24.
- Giordan A., De Vecchi G. (1987). *Les Origines du Savoir*. Delachaux et Niestlé, pag. 178.
- Giovannini A. (Enriques F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, IV. XXII.
- Godino J.D. (1993). La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matematica. *Quadrante*, 2, 2, 69-79.
- Meirieu P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment?*. Paris: ESF.
- Schoenfeld A.H. (1987a). What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). 189-215.
- Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.
- Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (eds.), 39-59.